

13. 도함수의 활용

- 1) 접선의 방정식
- 2) 물의 정리
- 3) 평균값의 정리
- 4) 함수의 증가와 감소
- 5) 함수의 극대와 극소
- 6) 도함수와 극대와 극소관계
- 7) 삼차함수와 극값
- 8) 속도와 가속도

1) 접선의 방정식

$f(x)$ 위의 점 (a, b) 를 지나는 직선의 방정식

$$y - b = \text{기울기}(x - a)$$

기울기

a. 두 점을 주어진다.

평균변화율로 기울기를 계산 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

b. 접점이 주어지는 경우 $(a, f(a))$

미분계수로 기울기 계산 $f'(a)$

또는

도함수를 구해서 $x = a$ 를 대입하여 구한다.

$$f'(x)$$

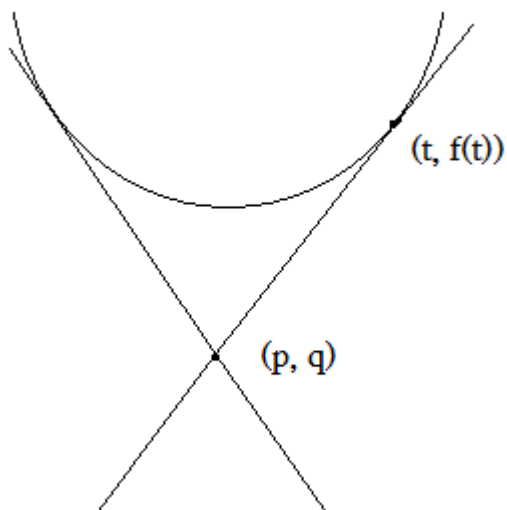
후

$$f'(a)$$

b. 기울기가 주어지는 경우

- ① 직접 기울기 제시
- ② 평행한 직선의 방정식 제시
- ③ 수직인 직선의 방정식 제시 (법선의 방정식)

c. 곡선 밖의 점이 주어지는 경우 (접선이 여러 개 생긴다)



① 임의의 접점을 잡는다, $(t, f(t))$

② 접선의 방정식을 만든다.

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

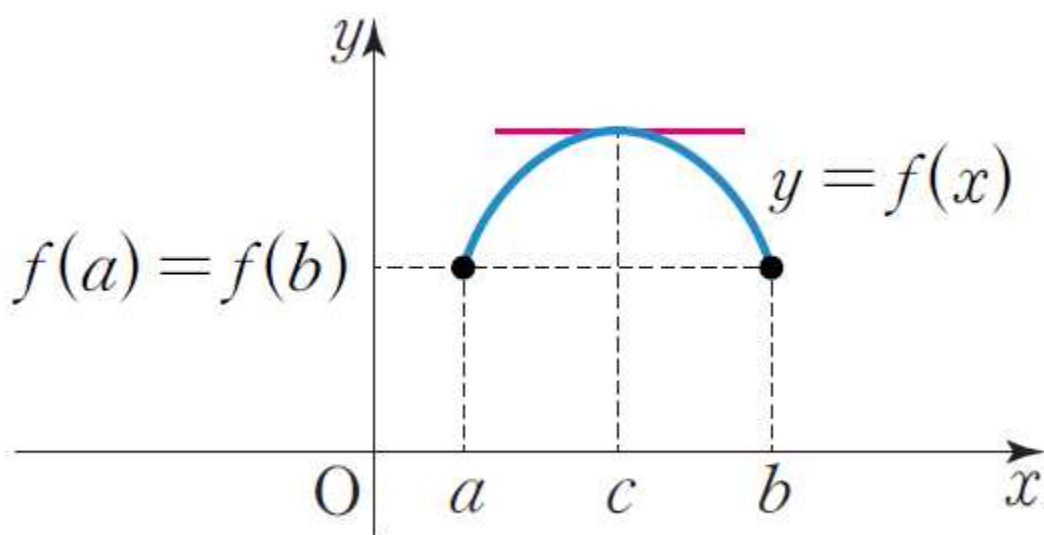
③ 접선이 지나는 점으로 계산하여 접점을 $(t, f(t))$ 을 구한다.

$$p - f(t) = f'(t)(q - t)$$

④ 접선의 방정식을 완성한다.

2) 롤의 정리

- ① 구간 $[a, b]$ 에서 연속
- ② 구간 (a, b) 에서 미분가능
- ③ $f(a) = f(b)$
- ④ $f'(c) = 0$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



$f'(c) = 0$ 의 의미

c 가 극점이 된다. 극점이 최소 하나 존재 한다는 의미이다.

예제) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ $(-1, 5)$

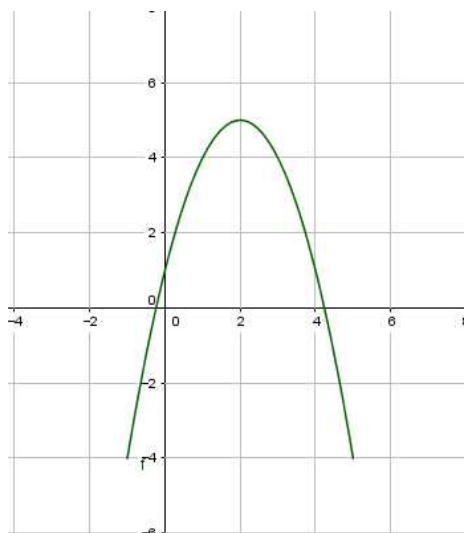
그래프 그리는 법

① 유형 : $\cap$

② $f(0) = 1$

③ 꼭지점 x좌표 : $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$

y좌표 : $f(2) = 5$

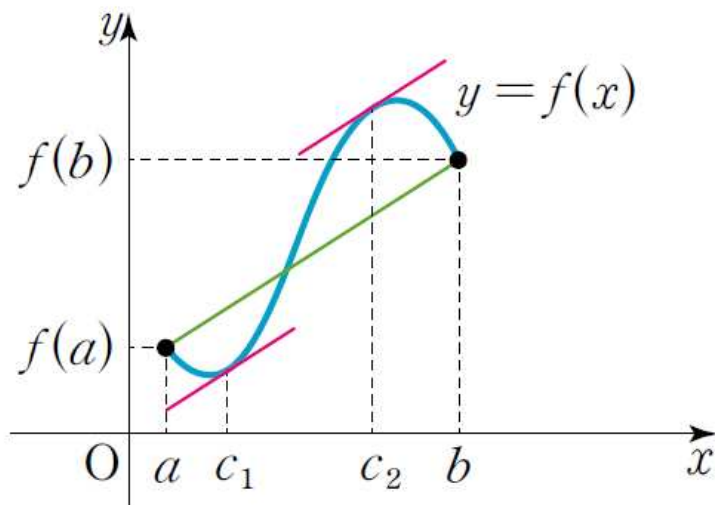


$$f'(c) = 0 \text{인 } c=2$$

$(-1, 5)$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

롤의 정리는 극점 찾는 것이 핵심이다.

3) 평균값의 정리 : 기울기가 같은 것이 적어도 하나 존재



① 구간 $[a, b]$ 에서 연속

② 구간 (a, b) 에서 미분가능

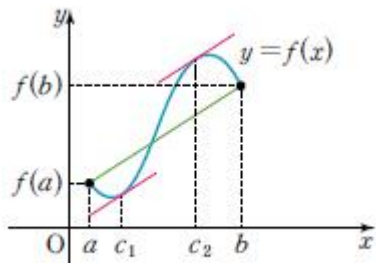
③
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

④ c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 평균변화율(두 점사이의 기울기) 이다.

$f'(c)$ 미분계수이다. 즉 점점 c 의 기울기이다.

즉 기울기가 같은 것이 적어도 하나 존재한다.



예제) $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$ $[-1, 1]$

① 다항함수 : 연속

② 다항함수 : 미가

$$\textcircled{3} \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{9 - (-7)}{2} = 8$$

$$\textcircled{4} f'(c) = 8$$

$$\text{도함수 } f'(x) = 4x + 8$$

$$8 = 4x + 8$$

$$x = 0$$

$[-1, 1]$ 사이에 $c=0$ 이 하나 존재한다.

풀이2)

그래프 작성

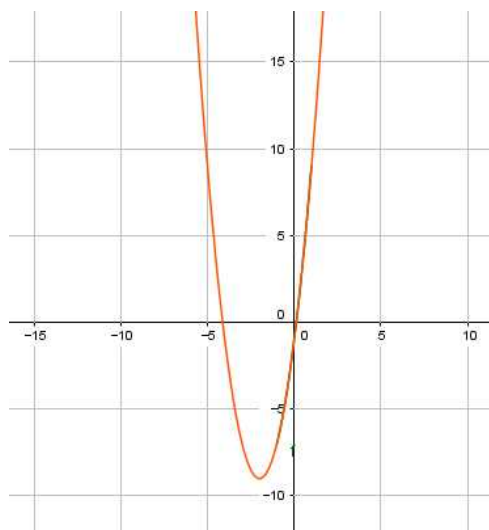
① 유형 : U

② $f(0) = -1$

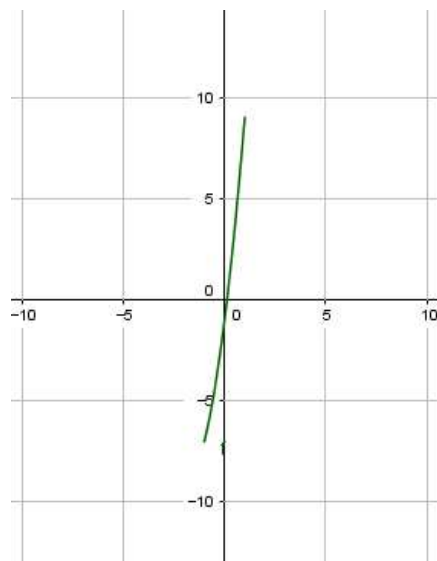
$$\textcircled{3} \text{ 꼭좌 : } -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \times 2} = -2$$

$$f(-2) = -9$$

④



에서



기울기가 같은 $[-1, 1]$ 사이에 $c = 0$ 이 하나 존재한다.

참고자료

1. 이차함수의 그래프 유형

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (단, } a > 0 \text{)이다.}$$

1) 기본형태 : U

2) 그래프 작성법

이차방정식의 근은 2개이다.

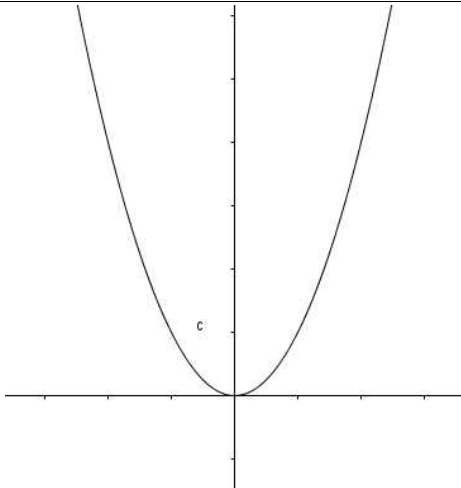
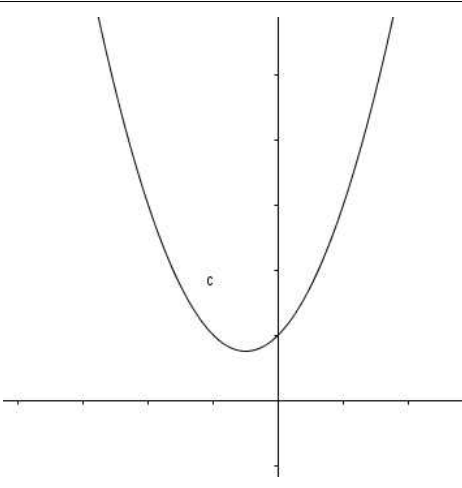
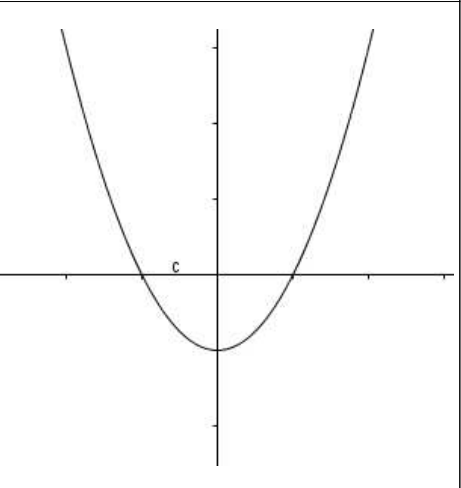
① 유형 : U

② $f(0)$

③ 꼭짓점의 x 좌표 $x = -\frac{b}{2a}$

꼭짓점의 y 좌표 $f(-\frac{b}{2a})$

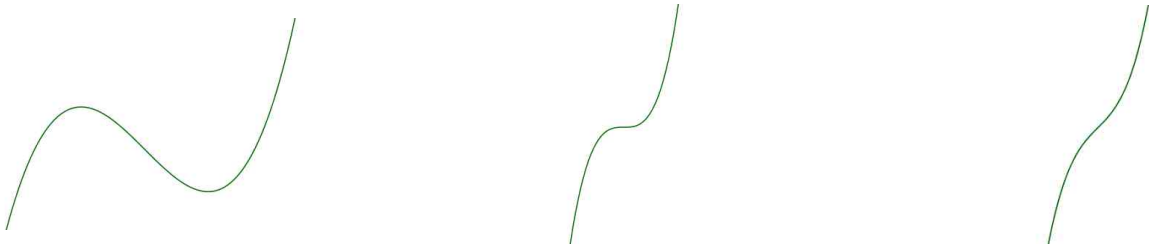
3) 근에 따른 그래프 개형

중근	허근	서로 다른근
		
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 + x + 1$	

2. 삼차함수의 그래프 유형

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ (단, } a > 0 \text{)}$$

① 기본형태 : $a > 0$ 이므로 오른쪽이 올라가는 형태



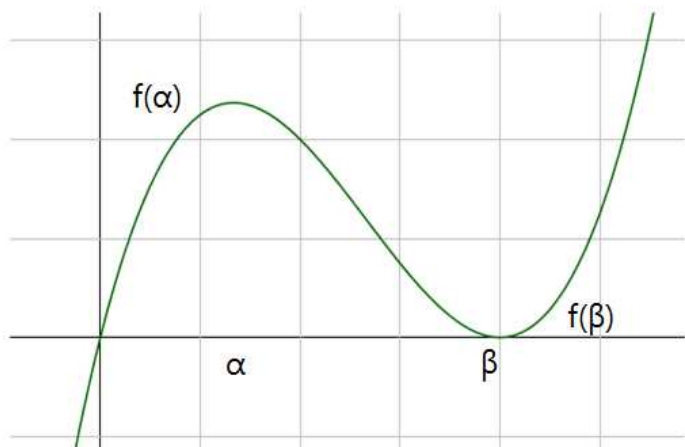
② 근에 따른 그래프 유형

서로 다른 3개의 근		
중근과 1개의 근		
1개의 근과 허근	 $f(x) = x^3 - x + 1$	 $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x - 1$
삼중근		

③ 미분과 삼차함수 (근의 공식은 없지만, 극점을 이용하여 사용할 수 있다)

차후 다신 정리

④ 삼차함수의 극값의 차이



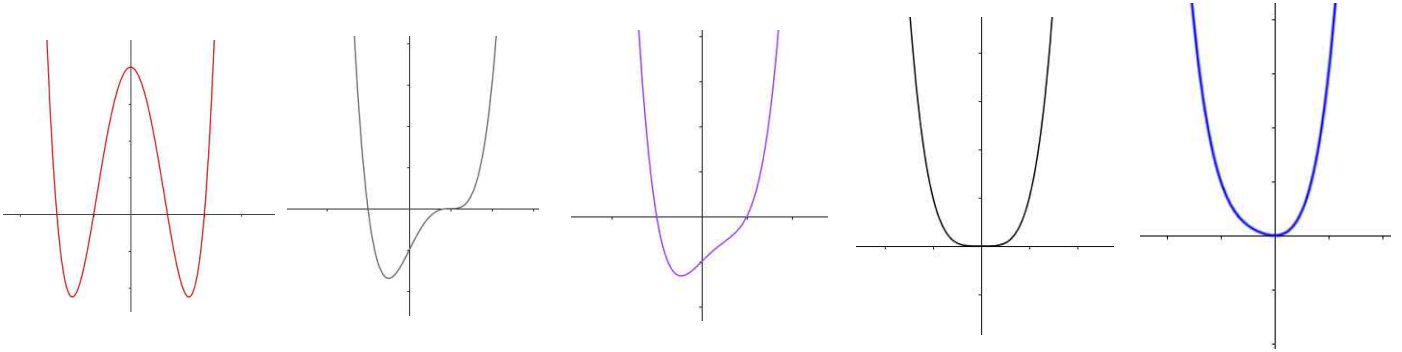
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ (단, } a > 0 \text{)}$$

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = \frac{|a|}{2}(\beta - \alpha)^3 \text{ (단, } \alpha < \beta \text{)}$$

3. 사차함수의 그래프 개형

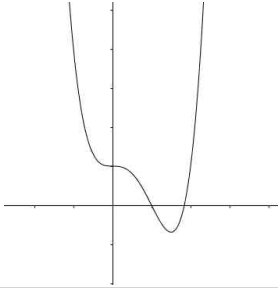
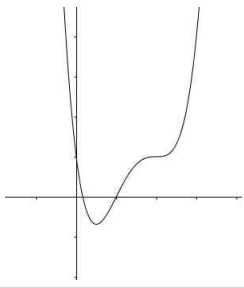
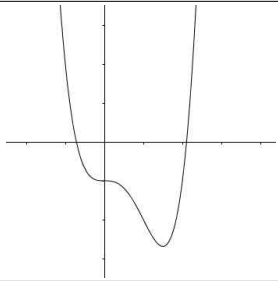
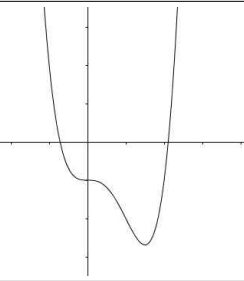
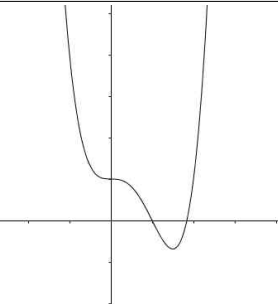
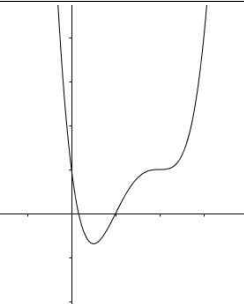
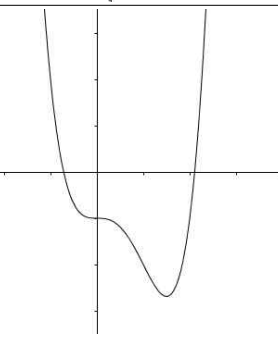
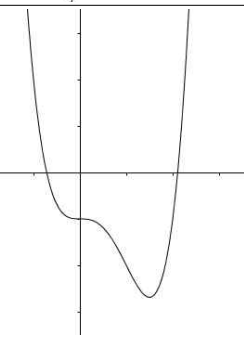
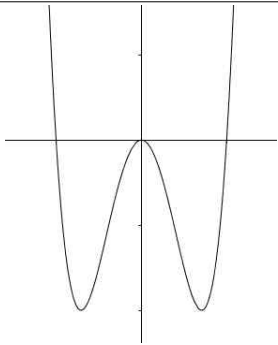
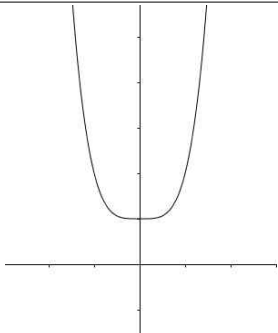
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (\text{단, } a > 0)$$

① 기본적인 개형

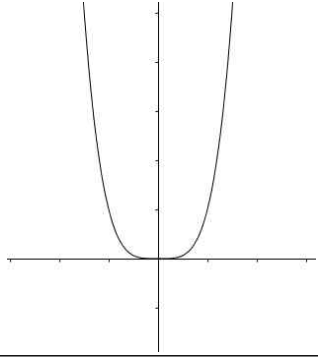


② 근에 따른 그래프의 개형

서로 다른 4개의 실근		
삼중근과 하나의 실근	 $f(x) = x^3(x-2)$	
중근과 중근		

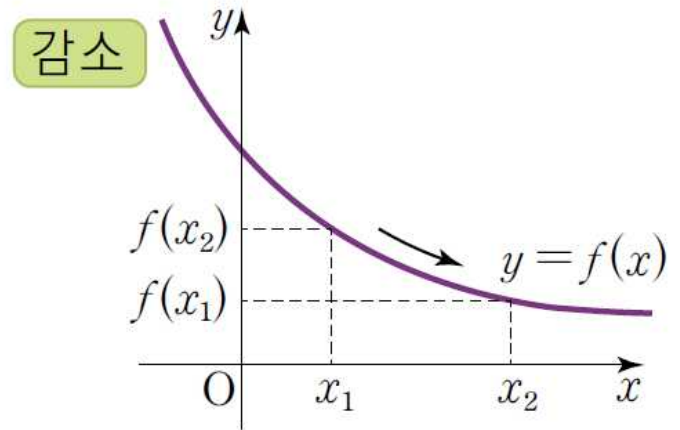
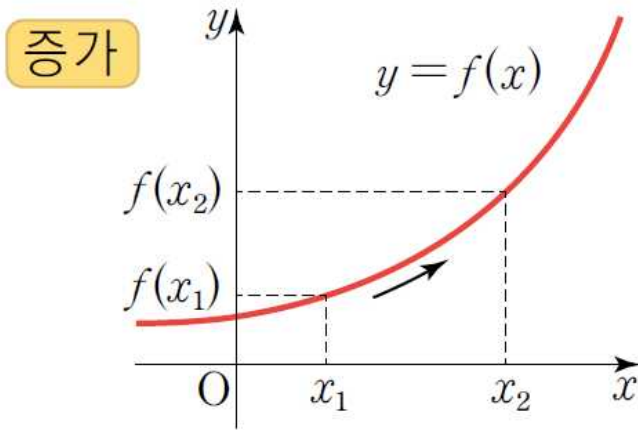
2개 실근과 2개 허근		
		
중근과 2개 허근		
		
중근과 2개 실근		
4개의 허근		

4중근



4) 함수의 증가와 감소

※ 증가는 감소와 반대이다. (증가로만 설명한다)



① 증가의 정의

$f(x)$ 가 임의의 두 점 x_1, x_2 에서

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) : f(x)$ 이 구간에서 증가라고 한다.

② 어떤 점에서의 증가와 감소

$f(x)$ 가 $x = a$ 에서 $f'(a) > 0$ 이면 증가상태

③ 구간에서의 증가와 감소

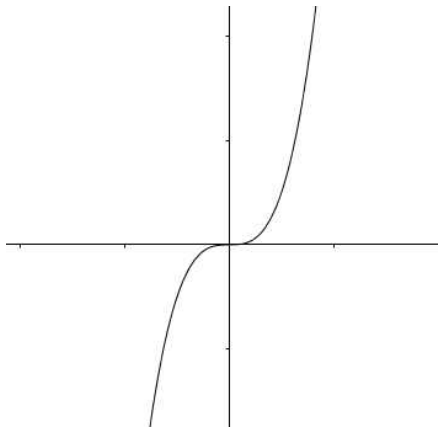
$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

주의 :

$f'(x) > 0$ 이면 $y = f(x)$ 는 증가함수 (역은 성립하지 않는다)

$f(x)$ 가 증가함수이면 $f'(x) > 0$ 이 아니다.!

예) $f(x) = x^3$ 는 모든 실수 구간에서 증가함수이다.



$x = 0$ 에서의 미분계수

$$f'(x) = 2x^2$$

$f'(0) = 0$ 이므로 비록 증가함수이지만 $f'(x) = 0$ 이 존재한다.

$f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고

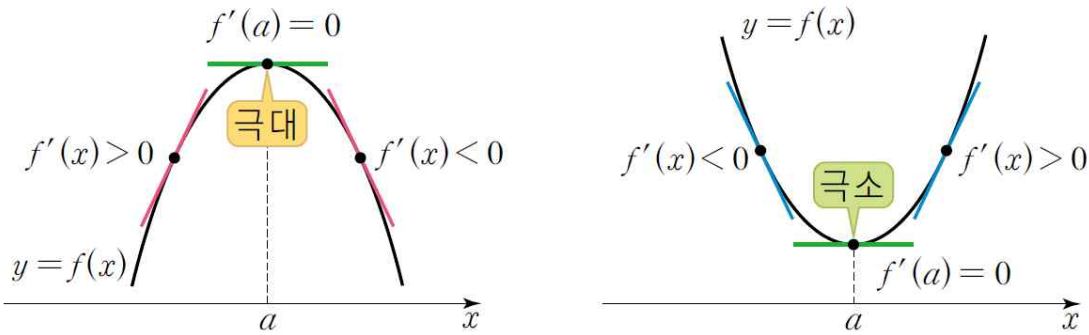
그 구간에서 $f(x)$ 가 증가함수이면

그 구간에서 $f'(x) \geq 0$ 이다.

(단, $f'(x) = 0$ 좌우에서는 $f'(x) > 0$ 이다.)

5) 함수의 극대와 극소

미분가능과 관련이 없고, 전제가 연속함수이면 된다.



정의

① $x=a$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 **증가상태에서 감소상태로** 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극대**(maximal)라하고, $f(a)$ 의 값을 극댓값(maximal value), 점 $(a, f(a))$ 를 극댓점이라 한다.

⇒ $f'(x)$ 의 부호가 + (증가상태)에서 - (감소상태)로 바뀐다.

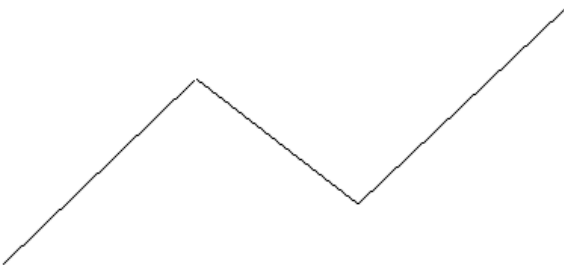
② $x=a$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 **감소상태에서 증가상태로** 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극소**(minimal)라하고, $f(a)$ 의 값을 극솟값(minimal value), 점 $(a, f(a))$ 를 극솟점이라 한다.

⇒ $f'(x)$ 의 부호가 - (감소상태)에서 + (증가상태)로 바뀐다.

① 극대 : 함수가 증가하다가 감소하는 하는 점
그 점의 x 좌표를 극점, y 좌표를 극댓값

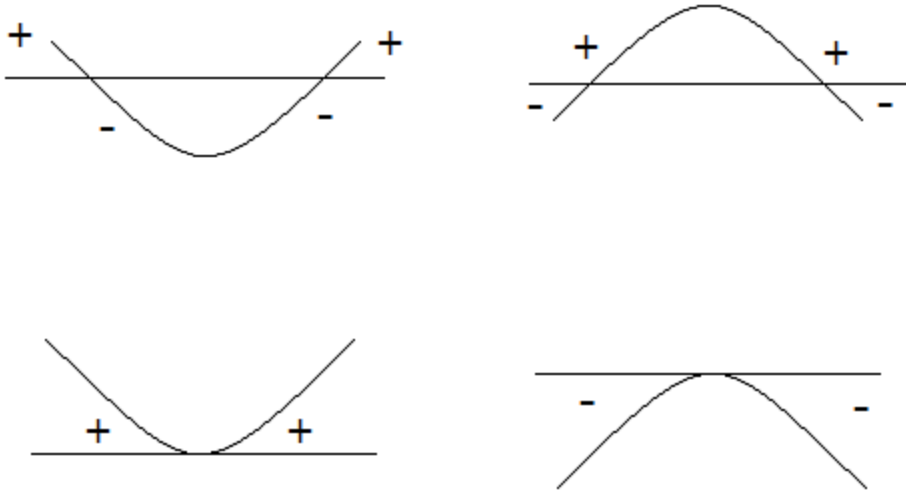
② 극소 : 함수가 감소하다가 증가하는 하는 점
그 점의 x 좌표를 극점, y 좌표를 극솟값

③ 미분가능과 관련이 없고, 연속함수이면 극점이 존재한다.

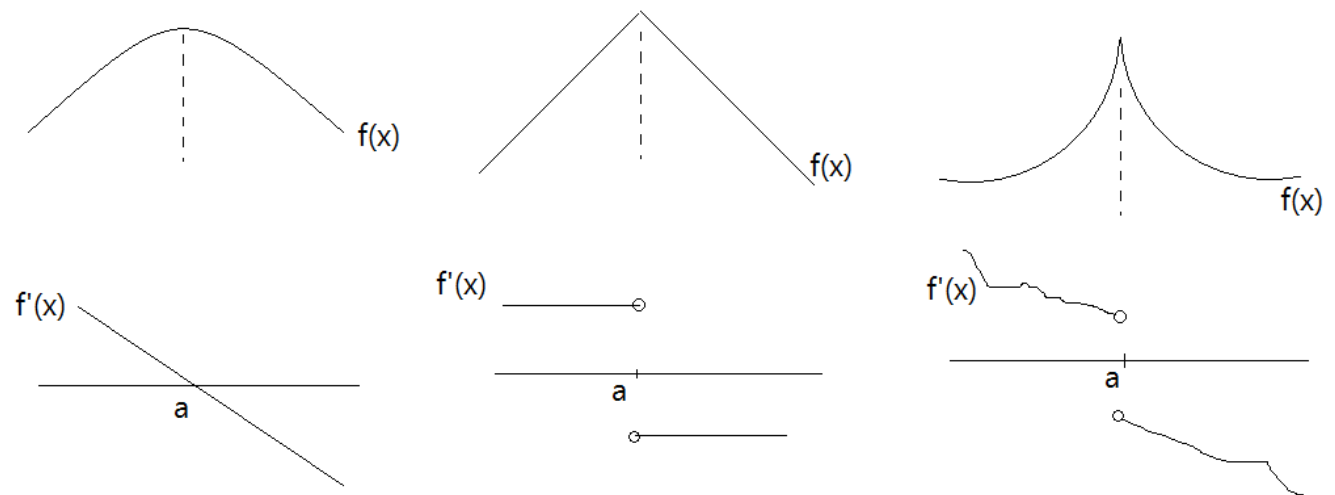


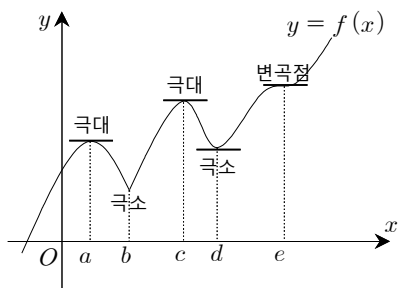
6) 도함수와 극대와 극소관계

도함수의 그래프를 그려보면



변곡점





- 위의 그림에서는 $x = a$, $x = c$ 에서 극대이고,
 $x = b$, $x = d$ 에서 극소이다.

⇒ **첨점에서는 미분불능이지만 극값을 갖는다.**

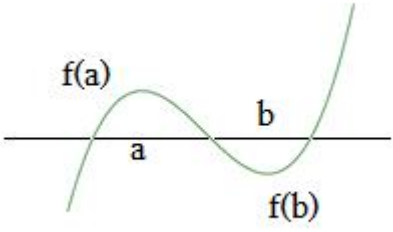
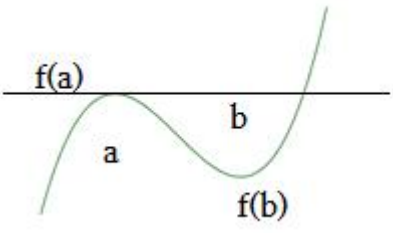
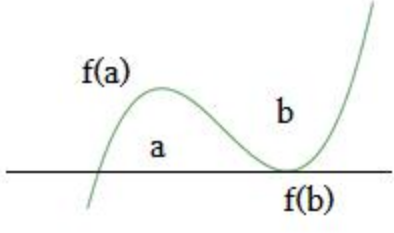
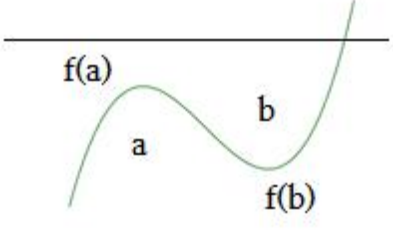
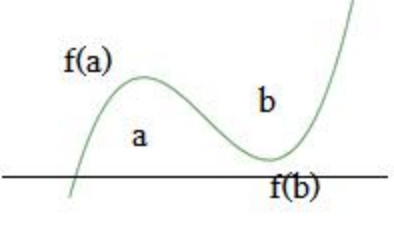
⇒ $x = e$ 에서는 계속 증가상태이므로 극값은 없다.

⇒ $x = e$ 의 왼쪽에서는 곡선이 위로 볼록하고 오른쪽에서는 곡선이 아래로 볼록하다.

- $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌, 우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀔 때 $x = a$ 에서 극값을 갖는다. : 바뀌지 않으면 변곡점이 된다.

7) 삼차함수와 극값

① 근과 극대, 극소

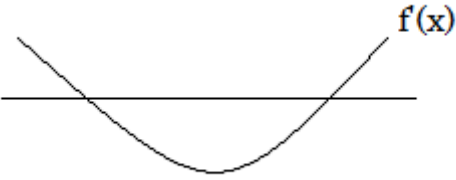
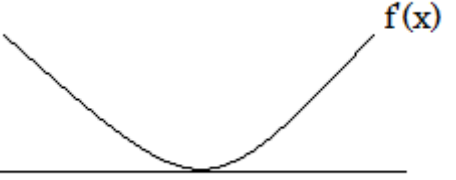
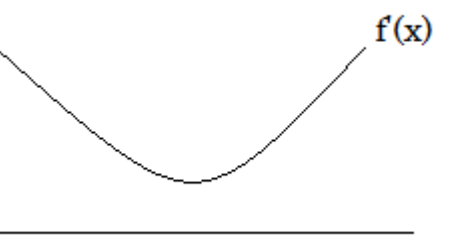
		실근 3개 극댓값 $\times$ 극솟값 < 0
		실근 1개 + 중근 극댓값 $\times$ 극솟값 $= 0$
		실근 1개 + 허근 극댓값 $\times$ 극솟값 > 0

② 도함수 $f'(x)$ 와 극값

$f(x)$ 3차 함수

$f'(x)$ 2차 함수이다.

2차 함수의 근의 판별식에 의해서 극값의 유무를 확인가능

	판별식 $D > 0$ 극대, 극소 모두 존재
	판별식 $D = 0$ 극값이 없다
	판별식 $D < 0$ 극값이 없다

■ 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

① 극값을 갖지 않을 조건

② 단조(증가 또는 감소)함수일 조건

③ 일대일함수일 조건

$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수가 될 조건

$f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 인 함수가 될 조건

④ 일대일대응일 조건

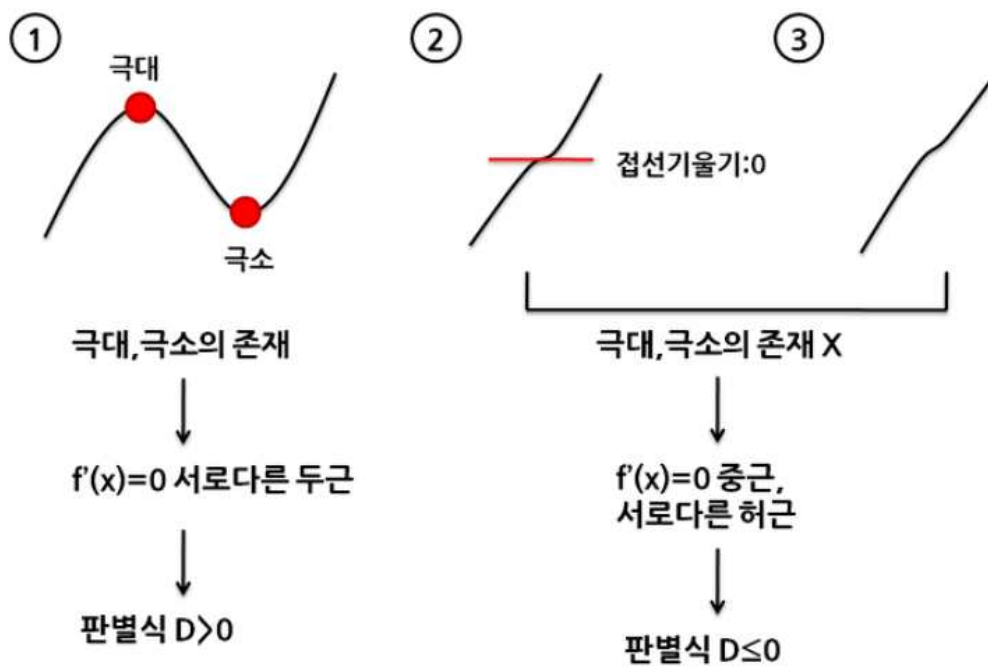
역함수를 가질 조건

※ 위의 것은 모두 같은 문제이다.

$\Rightarrow f'(x)$ 의 판별식 $D \leq 0$

($D=0$ 이면 변곡점이므로 극값이 아니다.)

※ 극값을 가질 조건 : $f'(x)$ 의 판별식 $D > 0$



8) 속도와 가속도

시간 t 에 따른 위치의 변화량

수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 좌표 x 가 $x = f(t)$ 로 나타낼 때,



(1) 시각 t 에서 $t + \Delta t$ 까지의 **평균 속도**(**평균 변화율**) : $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

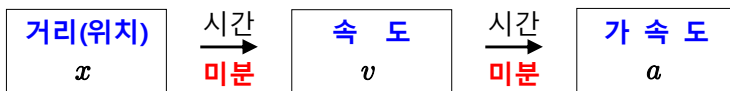
(2) 시각 t 에서의 **속도**(v) $\Rightarrow$ **거리의 시간에 대한 변화율**(**미분계수**) :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

■ **속력** : 속도(velocity)의 방향은 생각하지 않고 그 크기만 생각할 때, 속도의 절댓값 $|v|$ 를 **속도의 크기**, 즉 **속력**(speed)이라고 한다. 따라서 $f'(t)$ 는 속도를 나타내고 $|f'(t)|$ 는 속력(빠르기)을 나타낸다.

(3) 시각 t 에서의 **가속도**(a) $\Rightarrow$ 속도의 시간에 대한 변화율 :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t) = f''(t)$$



(4) 속도의 응용

물체를 똑바로 위로 던지는 경우 $x = a + bt + ct^2$ 꼴의 이차함수가 된다.

① 처음 던지는 위치 : $t = 0$ 일 때 $x = a$ (언덕 높이)

② 속도 : 한 번 미분 $\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = b + 2ct$

$t = 0$ 일 때 $v = b$ (초속도 v_0)

③ 가속도 : 두 번 미분 $\Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2c$

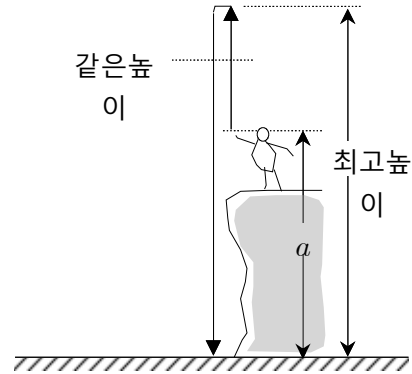
가속도가 상수이므로 등가속도 운동

※ $2c$ ($\doteq -9.8$)는 중력가속도이다.

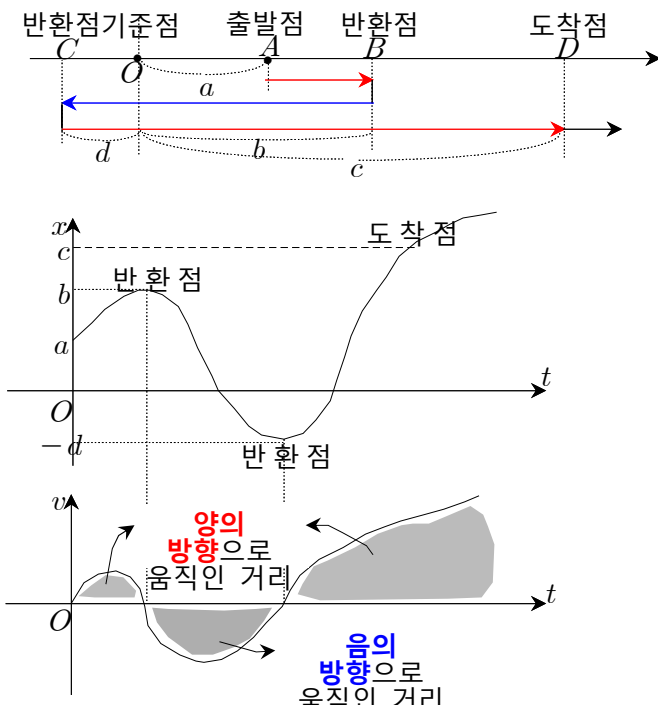
※ (최고 높이)=(방향 전환)=(정지) $\Rightarrow$ (속도)=0

※ 땅에 떨어진다. $\Rightarrow$ (높이)=0

※ 같은 높이에서 속력은 같고 속도의 방향은 반대



(5) 속도와 시간과의 그래프



■ 우선 $x-t$ 곡선인지, $v-t$ 곡선인지 확인

■ $x-t$ 곡선에서

- ① 기준점 O 가 아닌 출발점 A (기준점에서 a 인 위치의 점)에서 출발 $\rightarrow$
- ② B 까지 와서 방향 바뀌 $\leftarrow$
- ③ C 에서 다시 방향 바뀌 $\rightarrow$
- ④ 시간 t 일 때 D 에 도착 후 계속 $\rightarrow$

■ $v-t$ 곡선($x-t$ 곡선 미분)에서

- ① $x-t$ 곡선에서 반환점(극대점, 극솟점)
 $\Rightarrow v-t$ 곡선에서 $v = 0$ 되는 점
- ② 넓이는 움직인 거리
 $\Rightarrow$ (거리)=(속도) $\times$ (시간)
- ③ $v-t$ 곡선에는 출발점이 표시되지 않는다.(초기 조건이 필요)

시각 t 의 함수 $y=f(t)$ 가 주어질 때 y 의 t 에 대한 변화율은 $\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$

① 주어진 조건을 만족하는 식을 구한다.

② 양변을 시간 t 에 대하여 미분한다. $\Rightarrow$ 양변에 $\frac{d}{dt}$ 꼴이 생긴다.

③ 주어진 조건일 때의 변수의 값을 찾아 대입한다.

(예) 구의 부피는 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 이다. 이 식의 양변을 시간 t 에 대해 미분하면 좌변의 변수는 V 이고

우변의 변수는 r 이므로 $\frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} (\pi r^3)$ 에서 $\frac{dV}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ 가 된다.

- 길이의 시각에 대한 변화율 : $\frac{dl}{dt}$
- 부피의 시각에 대한 변화율 : $\frac{dV}{dt}$
- 넓이의 시각에 대한 변화율 : $\frac{dS}{dt}$
- 반지름의 시각에 대한 변화율 : $\frac{dr}{dt}$

※ 주의 : 커질 때는 부호를 + 로, 작아질 때는 부호를 - 로 잡는다.